

HIPERSPAȚII

Lumea în patru sau mai multe dimensiuni

RAFAEL LAHOZ-BELTRA

Traducere de Luiza Stroe

CUPRINS

Capitolul 0

Lumea în patru sau mai multe dimensiuni 9

Drumul către geometria proiectivă: o călătorie fără întoarcere 14

Arthur Cayley 16

Hermann Grassmann 24

Capitolul 1

Unde suntem? Dimensiuni, spații și geometrii 31

Conceptul de dimensiune sau „spațiu disponibil” 34

Ce studiază geometria? Obiecte în spațiu 38

Notarea figurilor geometrice: notația lui Schläfli 40

Când un spațiu este euclidian? 43

Exaltarea curbelor: rebeliunea împotriva
celui de-al cincilea postulat 47

*Roberto o vizitează pe Alicia. Câți kilometri sunt de la Londra
la New York?* 50

Cutia 1 53

Cutia 2 54

O abordare științifică a modele: croire și confecție neeuclidiană 56

Paraboloidul hiperbolic în arhitectura secolului XX 58

Capitolul 2

Tesseract sau umbra celei de-a patra dimensiuni 59

Vizualizând cea de-a patra dimensiune, cum „vedem” lumea în $\mathbb{R}^4$? 63

Spațiile 4D în cultura populară 64

O „grădină în patru dimensiuni”: spațiul euclidian $\mathbb{R}^4$ 69

Cât spațiu ocupă o hipersferă?
Volume în $\mathbb{R}^4$ 74

Hartă Hopf sau cum să vizualizezi o tesferă 76

*Paradox n-dimensional: mai multe dimensiuni...
mai puțin volum!* 80

Capitolul 3

**De la geometria euclidiană la topologie:
explorând *Terra incognita*** 83

Lumea în $\mathbb{R}^2$ și $\mathbb{R}^3$: experimentând cu drepte și plane 84

Calcul 1 90

Calcul 2 91

Calcul 3 92

Calcul 4 94

Experimentând în $\mathbb{R}^n$ cu hiperplane și hipersuprafețe 94

Teorema sandviciului cu șuncă 97

Ce studiază topologia? 98

Câte moduri sunt pentru a lega șireturile la pantofi? 100

Sticla lui Klein 102

Banda lui Moebius 103

Capitolul 4

Câte dimensiuni există în natură și în Univers? 107

Geometria universului: Spațiul-timp al lui Minkowski 110

Legile fizicii și viața într-o lume în patru
sau mai multe dimensiuni 112

*Există a patra dimensiune în natură? Ecouri 3D din
a patra dimensiune* 116

Dincolo de matematică: „Ocupanți” ai spațiului $\mathbb{R}^n$.
Ce se întâmplă când spațiul este ocupat? 119

Cutia 3 120

Cutia 4 123

Cutia 5 124

Cutia 6 126

Concluzie 126

Anexă

INTERFAȚA wxMAXIMA 129

Bibliografie recomandată 137

Capitolul 0

Lumea în patru sau mai multe dimensiuni

Când explic hiperspațiul, menționez întotdeauna că în copilărie mă uitam ore în șir la grădina japoneză de ceai, observând crapii, care înotau sub nufăr și trăiau într-o lume bidimensională.

Ochii lor văd fiecare câte o parte și pot vizualiza doar două dimensiuni. [...] Ei bine, astăzi există mulți fizicieni care cred că suntem pești care trăiesc în trei dimensiuni, fără să conștientizăm că pot exista până la unsprezece dimensiuni în adevăratul nostru univers.

(Michio Kaku, n. 1947)

Omenirea trăiește într-o eră în care, ca urmare a science-fiction-ului și a progreselor tehnologice, conceptul de hiperspațiu este asumat cu o oarecare normalitate, deși puțini oameni înțeleg cu adevărat ce este. În anii 1970, primele jocuri video au devenit populare, inclusiv „Star Wars”. Acest joc includea un asteroid traversând spațiul stelar. Deoarece ciocnirea sa trebuia evitată, nava cosmică avea un buton numit „hiperspațiu”. Apăsând acest buton se putea supraviețui, fiindcă nava dispărea din fața asteroidului și era trimisă într-o altă regiune a spațiului. Copiii de atunci au învățat să opereze cu acest concept. Cu toate acestea, puțini ne-am imaginat că cea mai elementară versiune a hiperspațiului – ideea unui spațiu cu patru dimensiuni – era ceva la care s-a ajuns după secole de efort matematic.

Deși astăzi hiperspațiile sunt o temă comună în multe domenii ale științei și tehnologiei, timp de secole matematicienii nu au fost capabili să conceapă spații cu mai mult de trei dimensiuni, întrucât munca lor se limita la spații geometrice sau obiecte la care se referea clasică „lățime, lungime și înălțime (sau grosime)”. Abia la sfârșitul secolului al XV-lea se pune din nou problema semnificației – și existenței



Figura 1. Timbru omagial pentru Newton.

posibile – a spațiilor cu mai mult de trei dimensiuni. Cu toate acestea, matematicienii din acea perioadă considerau că studierea unor astfel de spații era o prostie împotriva naturii, deoarece contemplarea posibilității existenței unor obiecte de peste trei dimensiuni era ca și cum ai imagina monștri sau orice alt fel de himeră. În 1685, teologul și matematicianul englez **John Wallis** (1616–1703) a scris un tratat de algebră în care spunea:

În timp ce natura însăși nu admite mai mult de trei dimensiuni (locale) (lungime, lățime și grosime, în linii, suprafețe și solide), poate părea inadecvat să vorbim despre un solid (de trei dimensiuni) desenat într-o a patra, a cincea, a șasea sau altă dimensiune.

Geometria euclidiană a fost singura geometrie acceptată până în secolul al XVIII-lea, epoca marilor figuri ale științei și gândirii raționaliste. În cele din urmă, filosofia a făcut loc științei moderne, cu figuri de talia lui **Galileo Galilei** (1564–1642) sau **Isaac Newton**

(1643–1727). În 1754, enciclopedistul și matematicianul francez **Jean le Rond d'Alembert** (1717–1783) a publicat, în celebra *Encyclopedie*, un articol despre conceptul de *dimensiune*. Astăzi se consideră că D'Alembert a fost primul care a luat în considerare posibilitatea unui spațiu cu patru dimensiuni, în care cea de-a patra dimensiune ar fi timpul. Mai târziu, un alt matematician contemporan cu D'Alembert, **Joseph-Louis Lagrange** (1736–1813), a adoptat în tratatul său de mecanică, *Mécanique analytique*, ideea a trei dimensiuni spațiale – sau carteziene x, y, z – și a patra temporală, t . Pentru o vreme, mecanica a fost considerată un domeniu al fizicii care studiază mișcarea corpurilor datorită acțiunii forțelor, ca o geometrie cu patru dimensiuni. Motivul era practic, deoarece într-un spațiu cu aceste dimensiuni poziția unui solid putea fi definită cu precizie.

Un alt progres care a avut loc în această perioadă a fost nașterea geometriei analitice, adică studiul figurilor geometrice prin algebră și analiză matematică. Timp de secole, relația dintre numere și obiectele geometrice era ceva care venea de la sine din motive practice: nevoia de a măsura lungimi, suprafețe și volume ducea la ideea de a putea folosi numerele atunci când studiem figurile geometrice, pas care a permis ulterior și alți pași. De exemplu, posibilitatea de a reprezenta punctele unui plan cu perechi de valori (x, y) de numere reale, adică $x, y \in \mathbb{R}$, a fost un pas fundamental pentru geometria analitică. Pe de altă parte, reprezentarea obiectelor geometrice cu formule sau expresii algebrice s-a dovedit a fi o idee fundamentală și, fără îndoială, un mare progres. De exemplu, reprezentarea unei drepte prin ecuația generală $ax + by = c$ și a unui plan prin $ax + by + cz = d$ sau a unui cerc cu centrul în punctul de coordonate (a, b) și raza r prin expresia $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, au permis ca, aplicând regulile algebrei, dreptele, planele și cercurile să poată fi „manipulate” ca și cum ar fi numere. Adică datorită algebrei putem obține nu doar o arie, ci și intersecții, distanțe etc.

Geometria analitică a luat naștere ca urmare a lucrării independente a lui **René Descartes** (1596–1650) și **Pierre de Fermat** (1607–1665). Descartes a introdus termenul de *geometrie analitică* în 1637 în lucrarea sa *Discurs despre metoda de a ne conduce corect rațiunea și de a căuta adevărul în științe*, cunoscută și sub forma abreviată *Metoda*. Cu toate acestea, Fermat, în lucrarea sa *Introducere în locuri plate și solide*, contribuie la ideea unui loc geometric, adică ecuațiile indică locuri geometrice concrete în care un anumit obiect (de exemplu, o dreaptă sau un cerc) există. Astfel, o ecuație de gradul al doilea $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ reprezintă un cerc cu centru (a, b) și rază r ; $(x-a)^2 = 4p(y-b)$ reprezintă o parabolă cu vârful (a, b) și focarul $(0, p)$;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

reprezintă o elipsă, iar

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

reprezintă o hiperbolă. Acestea figuri se numesc conice, studiate de Fermat, locuri geometrice într-un plan sau în $\mathbb{R}^2$. Interesant, ele apar atunci când un obiect cum este conul dublu se intersectează cu un plan în trei dimensiuni sau $\mathbb{R}^3$.

Cablurile care susțin unele poduri suspendate sau antenele parabolice sunt exemple de parabole, iar traiectoria eliptică a orbiteilor planetare studiată de **Johannes Kepler** (1571–1630), precum și oglinzile convexe sau hiperbolice ale unor telescoape – așa-numitele Cassegrain – sunt exemple care ilustrează utilizarea conicelor în viața de fiecare zi.

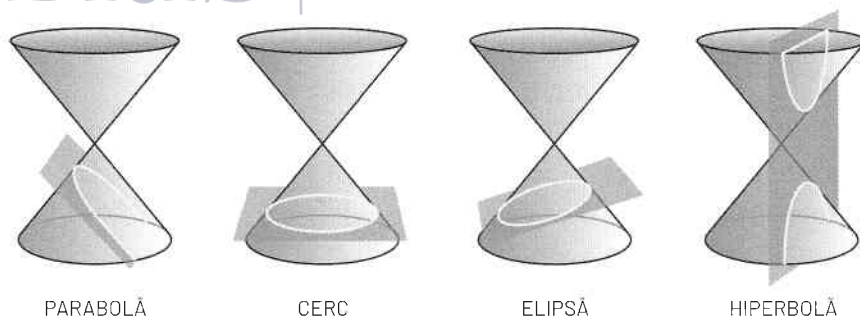


Figura 2. Obținerea conicelor prin intersectarea unui con dublu cu un plan.

În secolul al XVIII-lea, datorită unei alte figuri celebre ale matematicii, **Leonhard Paul Euler** (1707–1783), geometria analitică a fost sistematizată și formalizată și a dobândit statut de doctrină.

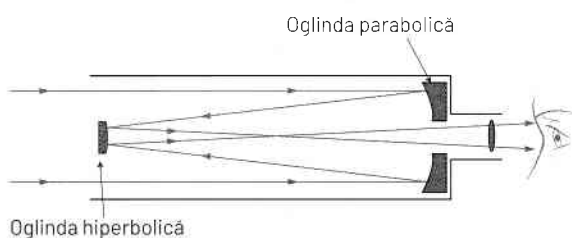


Figura 3. Sus: aplicarea conicelor la oglinzile telescopului Cassegrain.
Jos: timbru dedicat lui Galileo.

Drumul către geometria proiectivă: o călătorie fără întoarcere

Pe parcursul secolului al XIX-lea, în știința matematică au coexistat două moduri de a vedea geometria: pe de o parte, cea euclidiană, bazată pe raționamentul axiomatic; pe de altă parte, cea analitică care era, în sine, o metodologie perfect consolidată. Ca urmare a acestei situații, specialiștii în geometrie s-au împărțit în două mari școli: cea a geometriei analitice, pe care am văzut-o deja în paragrafele anterioare, și cea a geometriei sintetice.

Specialiștii în geometria sintetică sunt matematicieni – precum **Arthur Cayley** (1821–1895) – care raționează pe baza axiomelor, ceea ce înseamnă că deducțiile lor se bazează pe propuneri care sunt considerate evidente și, prin urmare, nu necesită nicio demonstrație. De exemplu, o axiomă este afirmația: „prin două puncte trece o singură dreaptă” sau „o mulțime este mai mare decât oricare dintre submulțimile care o compun”. Adepții acestei tendințe sunt moștenitorii geometriei euclidiene, deși actualizată și reînnoită.

Dacă figura lui Cayley este relevantă pentru nașterea și dezvoltarea ulterioară a geometriei proiective este pentru contribuția – fără ca aceasta să fi fost intenția lui – la dezvoltarea conceptului de matrice, pe care l-a definit în „A memoir on the theory of matrices”, un articol publicat în 1858, care va duce la definirea unei *matrice nule* și a unei *matrice unitate*. Mai mult, Cayley a demonstrat posibilitatea de a efectua operații cu matrice ca și cum ar fi simple numere, în special adunarea și înmulțirea a două matrice sau cum se obține inversul unei matrice. Calculul inversului unei matrice este fundamental în multe situații, deoarece permite împărțirea a două matrice prin înmulțirea matricei numărător cu inversul matricei numitor. Putem afirma că prin contribuția sa la algebra matricelor, Cayley stabilește bazele – adică instrumentul – de lucru în geometria proiectivă. În plus, algebra

matriceală are astăzi numeroase aplicații în materii la fel de diverse precum fizică, economie sau biologie.

Deși Arthur Cayley, unul dintre cei mai importanți matematicieni ai epocii victoriene, a fost unul dintre fondatorii școlii britanice de matematică pură, adevărul este că munca sa a contribuit la dezvoltarea unei arii de matematică în vogă astăzi, matematica aplicată. De fapt, printre numeroasele sale lucrări de cercetare (a publicat aproape trei sute de articole), contribuțiile sale la această ramură a științei se remarcă în chestiuni precum teoria factorială și a permutărilor, probabilitățile, teoria grupurilor etc.

După cum am menționat, în timpul secolului al XIX-lea geometria s-a împărțit în două școli, deși „separarea” a fost temporară. Matematicianul german **Felix Christian Klein** (1849–1925) a introdus, în 1872, o metodă de caracterizare a geometriilor, așa-numitul „program Erlangen”, cu care a încheiat separarea dintre geometria sintetică – cea care nu este altceva decât noua denumire care primește moștenirea actualizată a geometriei euclidiene, așa cum am menționat – și geometria analitică. Pentru Klein, aceste geometrii, printre altele, sunt cazuri particulare de geometrie proiectivă, care își datorează numele faptului că studiază efectul transformărilor (translații, rotații, întinderi etc.) asupra obiectelor geometrice. Transformările, numite și „transformări proiective”, sunt tehnici utilizate în mod obișnuit de pictori și arhitecți în lucrările și proiectele lor.

Deși multe dintre principiile sale erau cunoscute din cele mai vechi timpuri, nașterea acestei discipline a avut loc la începutul secolului al XIX-lea, când matematicienii au observat că au loc transformări care păstrau proprietățile geometriei euclidiene, așa-numitele „descriptive”, iar altele nu, care au fost numite „metrice”. Cayley însuși a verificat că spațiul euclidian este un caz particular al așa-numitului

Contină la pag. 19

ARTHUR CAYLEY



Figura 4.
Arthur Cayley.

În 16 august 1821 s-a născut matematicianul britanic Arthur Cayley, la Richmond, lângă Londra. Tatăl său, negustor, s-a mutat împreună cu familia la Sankt Petersburg (Rusia), unde micuțul Arthur și-a petrecut primii opt ani din viață. Cayley a fost o persoană versatilă care a studiat Matematica și Dreptul la Trinity College, Cambridge, absolvind în 1842. A publicat un număr semnificativ de lucrări de cercetare în *Cambridge Mathematical Journal*, în timp ce lucra ca avocat, ocupație care i-a oferit un salariu bun, permițându-i să-și dedice timpul liber studiului matematicii. A cunoscut matematicieni de talia lui **William Rowan Hamilton** (1805–1865), fon-

datorul operatorului hamiltonian, unul dintre elementele fundamentale ale mecanicii cuantice, și **James Joseph Sylvester** (1814–1897), un alt matematician care, precum Cayley, și-a câștigat existența ca avocat. În 1863 a fost numit profesor de matematică pură la Universitatea din Cambridge, funcție pe care a deținut-o până la sfârșitul zilelor sale. Una dintre cele mai importante contribuții ale sale a fost făcută în teoria matricelor și determinanților, aranjamente bidimensionale ale elementelor (numerelor) situate în m linii și n coloane:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

El este autorul multiplicării matricelor și celebra teoremă Cayley-Hamilton, care ne permite să calculăm așa-numitul „polinom caracteristic”, care se

obține prin diagonalizarea matricelor și care, în prezent, are un număr infinit de aplicații tehnico-științifice. De exemplu, permite determinarea stabilității unui ecosistem sau prezicerea evoluției unei afaceri în concurență cu altele și reprezintă fundamentul matematic al motorului de căutare Google. Deși specialitatea lui Cayley ca matematician a fost algebra, în 1843 s-a orientat către geometria analitică și a studiat spațiile n -dimensionale, genul de spații cu mai mult de trei dimensiuni, pe care le vom examina pe parcursul acestei cărți. În lucrările sale pe acest subiect a folosit determinanții, o valoare numerică ce se obține din elementele unei matrice pătratică ($n \times n$, număr egal de linii și coloane), care sunt folosite pentru a reprezenta obiecte matematice precum drepte, plane etc.

Alte idei introduse de Cayley erau chestiuni bine-cunoscute de mulți studenți. De exemplu, prin intermediul matricelor a introdus ideea că, dat fiind un sistem de ecuații:

$$\begin{cases} ax + by = x^* \\ cx + dy = y^* \end{cases}$$

matricea formată din coeficienții ecuațiilor, adică, a, b, c, d :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

„mută” punctul (x, y) în poziția (x^*, y^*) . Un alt mod de a exprima aceeași idee este în notația matriceală:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$$

Lucrarea sa asupra spațiilor cu patru dimensiuni a fost esențială în multe alte discipline, de exemplu, pentru dezvoltarea în secolul al XX-lea a teoriei relativității a lui Einstein. A lucrat cu cuaternioni: numere complexe în

Continuă la pag. 18